Sujet de thèse en Mathématiques, 2024

Encadrant: Christian Le Merdy (christian.lemerdy@univ-fcomte.fr)
Lieu: Laboratoire de Mathématiques de Besançon
Domaine: Analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs

Projections de norme 1 dans les espaces L^p non commutatifs

Etant donné un espace de Banach X, on dit qu'un sous-espace fermé $Y \subset X$ non nul est 1-complémenté lorsqu'il existe une projection $P\colon X \to X$ contractante (i.e. $\|P\| = 1$) telle que $\mathrm{Im}(P) = Y$. Lorsque X est un espace de Hilbert, tout $Y \subset X$ est 1-complémenté et les projections de norme 1 sont les projections orthogonales. Il s'agit du seul cas où décrire les sous-espaces 1-complémentés et les projections contractantes est facile.

Soit $1 < p \neq 2 < \infty$ et soit (Ω, μ) un espace mesuré σ-fini. Un célèbre théorème de Ando [1] dit que si $Y \subset L^p(\Omega)$ est 1-complémenté, alors Y est lui-même un espace L^p. De plus, si μ est normalisée et que $P\colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ est une projection contractante telle que $P(1) = 1$, alors P est une espérance conditionelle. Ces résultats ont conduit à une description complète des sous-espaces 1-complémentés et des projections contractantes dans les espaces L^p.

Ce projet de thèse concerne les espaces L^p non-commutatifs. Ces objets sont au coeur du développement actuel de l'analyse fonctionnelle non-commutative. La question générale dans ce cadre est de décrire les sous-espaces 1-complémentés et les projections de norme 1 dans les espaces L^p non-commutatifs. Aucune description générale n'est connue.

On peut observer que le théorème d'Ando cité ci-dessus ne peut pas s'étendre mot pour mot au cas non-commutatif. En effet, soit $1 < p \neq 2 < \infty$, soit $n \geq 2$ un entier et soit S^p_n l'espace de Schatten associé. Soit $Y \subset S^p_n$ le sous-espace des matrices n'ayant que des coefficients nuls en dehors de sa première colonne. Il est facile de voir que Y est 1-complémenté et que $Y \simeq \ell^2_n$. Donc Y ne ressemble en rien à un espace L^p non-commutatif.

Les résultats connus les plus importants sur les projections contractantes dans les espaces L^p non-commutatifs sont:

- Une description des sous-espaces 1-complémentés des espaces de Schatten $S^p(H)$, pour $1 < p \neq 2 < \infty$ [2], et une description des sous-espaces complètement 1-complémentés de ces mêmes espaces [4]. (Un espace $Y \subset S^p(H)$ est dit complètement 1-complémenté lorsqu'il est l'image d'une projection complètement bornée telle que $\|P\|_{cb} = 1$.)

- Une descrition des projections complètement positives et contractantes sur un espace L^p non-commutatif [3].

L'ojectif de la thèse sera d'explorer, au sein de la classe des espaces L^p non-commutatifs, de nouveaux cadres dans lesquels une description des sous-espaces 1-complémentés et des projections contractantes (ou complètement contractantes) est réalisable.

References

[1] T. Ando, *Contractive projections in Lp-spaces*, Pacific J. Math. 17 (1966), 391-405.
[2] J. Arazy, Y. Friedman, *Contractive projections in C_p*, Memoirs Amer. Math. Soc. 95 (1992).
[3] C. Arhancet, Y. Raynaud, *2-positive contractive projections on noncommutative L^p-spaces*, 2019.
[4] C. Le Merdy, É. Ricard, J. Roydor, *Completely 1-complemented subspaces of Schatten spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 2, 849–887.