

## **Proposition de sujet de thèse**

### **Intitulé français du sujet de thèse proposé :**

Localisation dynamique pour un modèle d'Anderson-Bernoulli continu et étude des statistiques des valeurs propres associées.

### **Intitulé en anglais :**

Dynamical localization for a continuous Anderson-Bernoulli model and study of the associated eigenvalue statistics.

### **Unités de recherche :**

Institut de Mathématiques de Bourgogne (IMB), Université de Bourgogne (Dijon, France)

Co-direction : LAGA, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord (Villetaneuse, France).

### **Nom, prénom et courriel du directeur (et co-directeur) de thèse :**

Taflin, Johan (johan.taflin@u-bourgogne.fr)

Co-directeur : Boumaza Hakim (boumaza@math.univ-paris13.fr)

### **Domaine scientifique principal de la thèse :**

Physique mathématique.

### **Domaine scientifique secondaire de la thèse :**

Opérateurs aléatoires et systèmes dynamiques, théorie ergodique, probabilités, algèbre de Lie.

### **Description du projet scientifique**

**Cadre du sujet :** Plusieurs résultats de localisation dynamique ont été obtenus pour des opérateurs d'Anderson-Bernoulli, en s'appuyant à chaque fois sur la technique de l'analyse multi-échelle (voir [1,2,3,4,5,6,10,11]). L'analyse multi-échelle est une procédure difficile à mettre en œuvre et qui nécessite la démonstration de plusieurs estimées intermédiaires comme celle de Wegner ou l'estimée de pas initial. Dans le cas des opérateurs unidimensionnels, il est légitime de se demander si une approche plus directe fondée uniquement sur l'étude de la suite des matrices de transfert et sur la preuve d'inégalités de grandes déviations pour cette suite, peut conduire à la localisation.

Une fois obtenue la localisation pour une famille d'opérateurs aléatoires dans un intervalle donné, la question naturelle est celle des statistiques spectrales des valeurs propres dans cet intervalle. Si on se place au voisinage d'une énergie  $E$  dans un intervalle où il y a localisation d'Anderson, deux valeurs propres suffisamment éloignées l'une de l'autre seront presque indépendantes et on s'attend à ce que le processus ponctuel associé aux valeurs propres renormalisées des opérateurs restreints à un cube de longueur  $L$  converge en loi vers un processus de Poisson lorsque  $L$  tend vers l'infini. Pour le modèle d'Anderson discret en dimension quelconque l'article de Minami [12] pose les bases de l'analyse moderne de ce phénomène à l'aide de l'estimée portant son nom. Depuis, Germinet et Klopp ont obtenu [8] un résultat général de statistiques locales des valeurs propres et d'indépendance asymptotique des valeurs propres pour des opérateurs aléatoires de type Schrödinger.

**Objectifs:** Le premier objectif de la thèse est d'obtenir une démonstration élémentaire de la localisation d'Anderson pour des modèles quasi-unidimensionnels continus.

Le second objectif de la thèse est, une fois caractérisée la région de localisation, d'y étudier les statistiques des valeurs propres. En particulier, il sera nécessaire d'obtenir des estimées de Minami généralisées, comme cela est fait dans [9] dans les cas discret et continu.

**Méthodologie:** Pour la première partie de la thèse, il s'agira d'étudier en détail les preuves des inégalités de grandes déviations obtenues pour les modèles continus à valeurs scalaires dans [3,4] et pour les modèles discrets quasi-unidimensionnels dans [11]. En combinant les idées de ces deux approches, il est possible de démontrer un résultat de grandes déviations sur les valeurs singulières des blocs des cocycles de Schrödinger associés à au modèle d'Anderson-Bernoulli quasi-unidimensionnel. Cela marque le point de départ de la preuve élémentaire par les grandes déviations de la localisation pour un tel modèle.

Pour la seconde partie de la thèse, à l'aide du cadre défini par Germinet et Klopp dans [8], on peut aborder des modèles dont les potentiels aléatoires sont ou se ramènent à des opérateurs de rang 1. Pour aborder des opérateurs aléatoires dont le potentiel aléatoire est de rang supérieur comme c'est le cas ici, il est nécessaire d'obtenir des estimées de Minami généralisées, comme cela est fait dans [9] dans les cas discret et continu. On obtiendra alors la convergence en loi du processus ponctuel associé aux valeurs propres renormalisées vers un processus de Poisson composé dont le support de la mesure de Levy peut être infini. Toutefois, en adaptant au cadre des opérateurs quasi-unidimensionnels les techniques de Dietlein et Elgart ([7]), il est possible d'obtenir que le processus limite obtenu soit en fait un processus de Poisson, ou au moins un processus de Poisson composé dont la mesure de Levy est à support fini.

### Connaissances et compétences requises :

Théorie des Probabilités, théorie des opérateurs et théorème spectral. Etude des cocycles de Schrödinger du point de vue des systèmes dynamiques.

### Bibliographie:

- [1] H. Boumaza. *Localization for an Anderson-Bernoulli model with generic interaction potential*. In : Tohoku Math. J. (2) 65.1 (2013), p. 57-74. DOI : [10.2748/tmj/1365452625](https://doi.org/10.2748/tmj/1365452625).
- [2] H. Boumaza. *Localization for a matrix-valued Anderson model*. In : Math. Phys. Anal. Geom. 12.3 (2009), p. 255-286. DOI : [10.1007/s11040-009-9061-3](https://doi.org/10.1007/s11040-009-9061-3).
- [3] V. Bucaj et al. *Localization for the one-dimensional Anderson model via positivity and large deviations for the Lyapunov exponent*. In : Trans. Am. Math. Soc. 372.5 (2019), p. 3619-3667. DOI : [10.1090/tran/7832](https://doi.org/10.1090/tran/7832).
- [4] V. Bucaj et al. *Positive Lyapunov exponents and a large deviation theorem for continuum Anderson models, briefly*. In : J. Funct. Anal. 277.9 (2019), p. 3179-3186. DOI : [10.1016/j.jfa.2019.05.028](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.05.028).
- [5] R. Carmona, A. Klein et F. Martinelli. *Anderson localization for Bernoulli and other singular potentials*. In : Commun. Math. Phys. 108 (1987), p. 41-66. DOI : [10.1007/BF01210702](https://doi.org/10.1007/BF01210702).
- [6] D. Damanik, R. Sims et G. Stolz. *Localization for one-dimensional, continuum, Bernoulli-Anderson models*. In : Duke Math. J. 114.1 (2002), p. 59-100. DOI : [10.1215/S0012-7094-02-11414-8](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-02-11414-8).
- [7] A. Dietlein et A. Elgart. *Level spacing and Poisson statistics for continuum random Schrodinger operators*. In : J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 23.4 (2021), p.1257-1293. DOI : [10.4171/JEMS/1033](https://doi.org/10.4171/JEMS/1033)
- [8] F. Germinet et F. Klopp. *Spectral statistics for random Schrodinger operators in the localized regime*. In : J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16.9 (2014), p. 1967-2031. DOI : [10.4171/JEMS/481](https://doi.org/10.4171/JEMS/481).
- [9] P. D. Hislop et M. Krishna. *Eigenvalue statistics for random Schrodinger operators with non rank one perturbations*. In : Commun. Math. Phys. 340.1 (2015), p. 125-143. DOI : [10.1007/s00220-015-2426-5](https://doi.org/10.1007/s00220-015-2426-5).
- [10] A. Klein, J. Lacroix et A. Speis. *Localization for the Anderson model on a strip with singular potentials*. In : J. Funct. Anal. 94.1 (1990), p. 135-155. DOI : [10.1016/0022-1236\(90\)90031-F](https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90031-F).
- [11] D. Macera, S. Sodin. *Anderson Localisation for Quasi-One-Dimensional Random Operators*, Ann. Henri Poincaré 23, No. 12, 4227–4247, 2022.
- [12] N. Minami. *Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model*. In : Commun. Math. Phys. 177.3 (1996), p. 709-725. DOI : [10.1007/BF02099544](https://doi.org/10.1007/BF02099544).