Proposition de sujet de thèse pour l'école doctorale Carnot-Pasteur

Direction de la thèse : Carlotta Donadello et Nathaël Alibaud
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UMR 6623
carlotta.donadello@univ-fcomte.fr, nathael.alibaud@ens2m.fr

15 mars 2025

1 Titre de la thèse

Autour de l'approximation de Rosenau des lois de conservation hyperboliques et paraboliques.

2 Descriptif du sujet

Ce projet de thèse porte sur les lois de conservation (LdC), issues de divers domaines tels que la mécanique des fluides, la dynamique des gaz et le trafic routier. Ces équations présentent une difficulté théorique majeure liée à l'apparition en temps fini de discontinuités dans la solution à partir de données initiales génériques. Ces discontinuités ne peuvent être écartées car elles peuvent correspondre, dans la modélisation, à des phénomènes réels comme les congestions en trafic routier.

Les résultats de bonne position pour des LdC reposent souvent sur des techniques de régularisation et passage à la limite, la plus courante étant l'approximation parabolique développée dans les années 1960. Cependant, d'autres approches ont vu le jour, notamment celle introduite par Rosenau en hydrodynamique [7].

L'objectif de cette thèse est d'analyser l'impact de ces différentes régularisations sur les LdC, en s'intéressant à des thématiques contemporaines telles que les réseaux et le contrôle. Une question plus complexe, proposée par Denis Serre, pourrait également être abordée, portant sur des estimations quantitatives optimales relatives à l'influence du choix de la régularisation.

3 Contexte de la thèse

La thèse sera co-encadrée par Carlotta Donadello (MCF HDR au LmB) et Nathaël Alibaud (MCF au LmB). Bien que l'analyse qualitative des LdC soit au cœur du projet, des questions liées à la convergence de schémas numériques seront également explorées.

4 Objectifs de la thèse

Le travail de recherche s'articulera autour de trois axes principaux.

Étude des réseaux. Lorsque la fonction de flux $f(x, u)$ est discontinue en $x = 0$ (modélisation d'un réseau à deux branches, par exemple), la théorie développée depuis [3] montre que l'unicité des solutions peut être démontrée seulement en limitant l'étude à des sous-ensembles de solutions distributionnelles. Chacun de ces sous-ensembles est caractérisé par les solutions stationnaires qu'il contient (son *germe*).

Le germe le plus connu est associé aux solutions obtenues comme limites de l'approximation parabolique :

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(x, u^\varepsilon) = \varepsilon \partial^2_{xx} u, \tag{1}$$

avec la condition de Kirkhoff $u^\varepsilon(t, 0^-) = u^\varepsilon(t, 0^+)$. Toutefois, la même approximation parabolique sertie d'autres conditions de transmission à l'interface conduit à des germes distincts [3, 5].

Nous souhaitons ici établir la correspondance inverse : retrouver les régularisations adéquates en partant d'un germe fixé. Pour cela, nous examinerons un modèle de Rosenau avec un scaling approprié pour approcher la LdC parabolique lorsque $\nu \to 0^+$:

$$\partial_t v^\nu + \partial_x f(x, v^\nu) = -\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{1 + \nu^2|\xi|^2}\mathcal{F}v^\nu\right), \tag{2}$$

et chercherons à déterminer si un choix approprié de germe pour v^ν permet de retrouver les conditions de transmission attendues.

Contrôle et inverse design. En supposant que la fonction de flux $f(u)$ est strictement convexe et pour un temps fixé $T > 0$, les profils atteignables par la LdC au temps $t = T$ sont ceux qui satisfont l'inégalité d'Oleinik [2]. De plus, il est possible de caractériser l'ensemble des conditions initiales permettant d'atteindre ces profils [6]. L'objectif est d'effectuer une analyse similaire en considérant différentes régularisations des LdC, en commençant par celle de Rosenau. À plus long terme, nous souhaitons étendre cette étude à des opérateurs non locaux singuliers, tels que le Laplacien fractionnaire, et mettre en évidence des comportements contrastés.

Une question ouverte de Denis Serre. Ce dernier axe vise à évaluer les erreurs d'approximation des modèles paraboliques et de Rosenau. Il est établi que la distance entre u et son approximation u^ε est de l'ordre de ε, tout comme la distance entre u et w^ε dans le modèle de Rosenau (avec le scaling usuel) :

$$\partial_t w^\varepsilon + \partial_x f(w^\varepsilon) = \varepsilon\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{1 + \varepsilon^2|\xi|^2}\mathcal{F}w^\varepsilon\right). \tag{3}$$

Toutefois, des calculs heuristiques suggèrent que $dist(u^\varepsilon, w^\varepsilon) = o(\varepsilon)$. Nous avons récemment démontré ce résultat dans un cadre fractionnaire [1], mais le cas local reste un problème ouvert. Nous explorerons cette question en nous appuyant sur les avancées récentes en solutions de viscosité [4] via le transport optimal. Selon la difficulté rencontrée, une première approche consistera à étudier ces équations sous une forme semi-discrétisée.

Références

[1] N. Alibaud, G. M. Coclite, M. Dalery, C. Donadello. Vanishing viscosity versus Rosenau approximation for scalar conservation laws : The fractional case. Preprint, 2024.

[2] F. Ancona, A. Marson. On the Attainable Set for Scalar Nonlinear Conservation Laws with Boundary Control. SIAM J. Control Optim. 36 (1998), no. 1, 290–312.

[3] B. Andreianov, K. H. Karlsen, N. H. Risebro. A theory of L^1-dissipative solvers for scalar conservation laws with discontinuous flux. Arch. Ration. Mech. Anal. 201 (2011), no. 1, 27–86.

[4] A. Ciomaga, M. Le, O. Ley, E. Topp. Comparison principle for general nonlocal Hamilton-Jacobi equations with superlinear gradient. Preprint, 2024.

[5] Vanishing viscosity on a star-shaped graph under general transmission conditions at the node. G. M. Coclite, C. Donadello. Netw. Heterog. Media 15 (2020), no. 2, 197–213.

[6] R. M. Colombo, V. Perrolaz, A. Sylla. Peculiarities of space dependent conservation laws : inverse design and asymptotics. SEMA SIMAI Springer Ser., 34 2024, 217–226.

[7] Ph. Rosenau. Extending hydrodynamics via the regularization of the Chapman-Enskog expansion. Phys. Rev. A (3) 40 (1989), no. 12, 7193–7196.