Représentations galoisiennes de modules de Drinfeld à grande image, aspects explicites

Encadrante : Cécile Armana (Laboratoire de mathématiques de Besançon)
Contact : cecile.armana@univ-fcomte.fr

Les courbes elliptiques sont données par des équations diophantiennes cubiques. Elles portent une structure à la fois géométrique (courbe algébrique) et algébrique (groupe abélien) et sont des objets majeurs de la géométrie arithmétique. Les points de torsion des courbes elliptiques et les représentations galoisiennes qu'on leur associe ont suscité et suscitent encore de très nombreux travaux. Un résultat emblématique est le *théorème de l'image ouverte de Serre* (1972, [Ser72]) :

Soit E une courbe elliptique sur un corps de nombres K telle que E n'a pas de multiplication complexe. L'image de la représentation galoisienne adélique

$$\rho_E : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}),$$

associée aux points de torsion de E, est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$. Autrement dit l'image de ρ_E est d'indice fini dans $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$.

En particulier pour une telle courbe elliptique E et pour tout nombre premier p suffisamment grand, la représentation galoisienne résiduelle $\overline{\rho}_{E,p} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est surjective. Ce théorème de Serre a donné lieu à nombreux prolongements et à des questions encore ouvertes. Mentionnons : étude des nombres premiers exceptionnels pour lesquels $\overline{\rho}_{E,p}$ n'est pas surjective ; explicitation d'une constante C_E telle que pour tout nombre premier $p \geqslant C_E$, la représentation $\overline{\rho}_{E,p}$ est surjective ; conjecture d'uniformité qui prédit qu'il existe une constante C_E qui serait indépendante de E ; généralisation à des variétés abéliennes.

Il existe une longue série de profondes analogies entre d'une part les courbes elliptiques sur les corps des nombres, d'autre part les modules de Drinfeld sur les corps de fonctions en caractéristique p. Tout comme les courbes elliptiques pour les corps des nombres, les modules de Drinfeld jouent un rôle majeur dans l'arithmétique des corps de fonctions et dans leur programme de Langlands. Notons $A = \mathbb{F}_q[t]$ et $F = \mathbb{F}_q(t)$. Pour un module de Drinfeld ϕ de rang $r \geqslant 1$ sur F, les points de torsion de ϕ forment un A-module et ils fournissent une représentation galoisienne

$$\rho_\phi : \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F) \to \mathrm{GL}_r(\widehat{A}).$$

En 2009 Pink et Rütsche [PR09] ont démontré un analogue du théorème de l'image ouverte de Serre, à savoir que pour tout module de Drinfeld ϕ de rang $r \geqslant 1$, la représentation ρ_ϕ est d'image ouverte. Plusieurs travaux récents ont été consacrés à la situation où ρ_ϕ est en fait surjective, en exhibant des exemples de modules de Drinfeld ϕ – seul ou en famille – qui satisfont cette propriété ([Che21, Che22]) ou en prouvant des résultats de nature statistique sur ce type de comportement parmi l'ensemble des modules de Drinfeld ϕ de rang donné ([Che24, Ray24a]). Dans une prépublication très récente, Zywina [Zyw25] a prouvé que la densité des modules de Drinfeld ϕ de rang 2 tels que la représentation ρ_ϕ est surjective est strictement positive ; et que la densité des modules de Drinfeld ϕ de rang $r \geqslant 2$ tels que les représentations résiduelles $\overline{\rho}_{\phi,\mathfrak{p}}$ sont surjectives sur $\mathrm{GL}_r(A/\mathfrak{p})$ pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A est égale à 1.

Ce sujet de thèse consiste à s'appuyer sur ces travaux récents pour apporter des contributions à l'étude des représentations galoisiennes issues de la torsion des modules de Drinfeld, toujours du point de vue du théorème de l'image ouverte. On propose de s'intéresser aux questions suivantes en rang r égal à 2 ou supérieur :

— étant donné un module de Drinfeld ϕ, expliciter une constante C_ϕ telle que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de degré $\geqslant C_\phi$, la représentation résiduelle $\overline{\rho}_{\phi,\mathfrak{p}}$ est surjective ;

— étant donné un module de Drinfeld ϕ, proposer une méthode, voire un algorithme, qui fournit des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ tels que la représentation résiduelle $\overline{\rho}_{\phi,\mathfrak{p}}$ est surjective ; en effet les constantes C_ϕ de la question précédente peuvent ne pas être suffisamment explicites, ou d'un ordre de grandeur trop grand pour être mises en pratique ;

— étudier les défauts de surjectivité ; pour la représentation résiduelle $\overline{\rho}_{\phi,\mathfrak{p}}$, il s'agit d'exhiber des modules de Drinfeld ϕ et des idéaux premiers exceptionnels $\mathfrak{p}$ pour lesquels elle n'est pas surjective ; pour la représentation adélique ρ_ϕ, une éventuelle non-surjectivité peut être expliquée par des entrelacements entre les représentations $\mathfrak{p}$-adique et $\mathfrak{q}$-adique $\rho_{\phi,\mathfrak{p}}$ et $\rho_{\phi,\mathfrak{q}}$, c'est-à-dire par de possibles interactions entre les corps de division pour ϕ associés à deux idéaux premiers $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$.

Références

[Che21] C.-H. Chen, *Surjectivity of the adelic Galois representation associated to a Drinfeld module of prime rank*, prépublication arXiv 2111.04234 (2021)

[Che22] C.-H. Chen, *Surjectivity of the adelic Galois representation associated to a Drinfeld module of rank 3*, J. Number Theory 237, 99–123 (2022)

[Che24] C.-H. Chen, *Natural density of rank-*2 *Drinfeld modules with big Galois image*, prépublication arXiv 2403.15109 (2024)

[PR09] R. Pink et E. Rütsche, *Adelic openness for Drinfeld modules in generic characteristic*, J. Number Theory 129, No. 4, 882–907 (2009)

[Ray24a] A. Ray, *The T-adic Galois representation is surjective for a positive density of Drinfeld modules*, Res. Number Theory 10, No. 3, Paper No. 56, 12 p. (2024)

[Ser72] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. 15, 259–331 (1972)

[Zyw25] D. Zywina, *Drinfeld modules with maximal Galois action*, prépublication arXiv 2502.01030 (2025)

Domaine scientifique prinbcipal de la thèse : théorie des nombres, algèbre, géométrie arithmétique

Connaissances et compétences requises : formation solide de niveau M2 recherche en mathématiques, en algèbre et/ou théorie de nombres.