

Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé :

Structure et ergodicité des semigroupes quantiques

Intitulé en anglais du sujet de thèse proposé :

Structure and ergodicity of quantum semigroups

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques de Besançon (LMB), UMR 6623, Université Marie et Louis Pasteur & CNRS

Nom, prénom et courriel de la directrice de thèse :

Kuznetsova Yulia, yulia.kuznetsova@univ-fcomte.fr

Domaine scientifique principal de la thèse :

Mathématiques fondamentales

Description du projet scientifique :

Les groupes quantiques sont un modèle mathématique de symétries dans un espace à la géométrie non-commutative. Leur développement a suivi des approches algébrique et analytiques, réunis aujourd'hui dans la théorie des groupes quantiques localement compacts.

Les groupes (quantiques ou non) les plus accessibles à l'étude sont les groupes compacts. Ils admettent une description très précise de leurs représentations et donc l'analyse harmonique puissante dessus. Mais l'étude d'un groupe quelconque ne se réduit pas à celle des groupes compacts.

Il existe pourtant une façon de décrire un groupe localement compact par un objet compact: c'est son compactifié faiblement presque périodique (FPP, ou WAP en anglais), qui n'est plus un groupe, mais un semigroupe. Ce fait a largement motivé la recherche sur des semigroupes topologiques.

Tout semigroupe compact admet un idéal minimal dit noyau qui est la réunion de groupes isomorphes. Un fait remarquable est que le noyau du compactifié FPP G^w est un autre compactifié G^b du groupe initial G , et un groupe.

La thèse s'inscrit dans le programme de la théorie quantique analogue. La définition d'un semigroupe quantiques semi-topologique est donnée par M. Daws [1]. Mais les notions d'un idéal ou d'un noyau n'existent pas; la / le doctortant.e devra les trouver.

Le compactifié FPP est bien connue dans le cas classique, mais se heurte à plusieurs obstacles techniques lors des travaux analogues dans le cadre quantique [4, 1, 2]. Les difficultés concernent déjà la stabilité des espaces sous la multiplication, un problème résolu par Daws [1], mais il reste à montrer l'ergodicité de ce compactifié, une propriété indispensable dans le cas classique. Le résultat récent de Y. Kuznetsova [2] construit un sous-espace large ergodique du compactifié FPP. Un développement immédiat de ce travail est de donner à cet espace la structure d'un semigroupe quantique.

Le lien entre le noyau du compactifié FPP et le compactifié de Bohr de Soltan [5] d'un groupe quantique est également à clarifier, en comparant notamment avec les effets de la dualité de semigroupes quantiques [3].

English version:

Quantum groups model symmetries in a space with a non-commutative geometry. Their development passed by algebraic and analytic approaches, united now in the theory of locally compact quantum groups.

The best studied groups (quantum or not) are the compact ones: their representation theory has a very precise description which allows to construct a powerful harmonic analysis. But the study of a general group cannot be reduced to the compact ones.

There is however a way to describe a locally compact group by a compact object: this is the weakly almost periodic (WAP) compactification, which is no more a group but a semigroup. This has largely motivated research on topological semigroups.

Every compact semigroup has a minimal ideal called the kernel, which is moreover a union of isomorphic groups. A remarkable fact is that the kernel of the WAP compactification G^w is another compactification G^b of the same group G , and this is a group.

The thesis will join the program of the analogous quantum theory. The definition of a quantum semi-topological semigroup was given by M. Daws [1]. But the notions of an ideal or of a kernel do not exist; they should be found by the PhD student.

The WAP compactification is well known in the classical case, but encounters numerous technical obstacles in the quantum case [4, 1, 2]. The difficulties appear already in closedness of the spaces under multiplication, a problem resolved by Daws [1], but it remains to show ergodicity of the compactification, a crucial property in the classical case. A recent result of Yu. Kuznetsova [2] constructs a large ergodic subspace in the WAP compactification. An immediate development of this work is to give to it the structure of a quantum semigroup.

The link between the WAP compactification and the Bohr one of Soltan [5] needs also clarification, in the quantum case. It should be compared with the duality effects of quantum semigroups [3].

Connaissances et compétences requises :

Des connaissances en C^* -algèbres et des algèbres de von Neumann, ainsi qu'en topologie, sont nécessaires.

Knowledge of C^* - and von Neumann algebras is necessary, as well as a good background in topology.

REFERENCES

- [1] M. Daws, Non-commutative separate continuity and weakly almost periodicity for Hopf von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.* 269 Iss. 3 (2015), 683–704.
- [2] Yu. Kuznetsova, Invariant means on subspaces of quantum weakly almost periodic functionals, 17 p., *J. Analyse Math.* (2024), arXiv :2206.12591 [math.OA].
- [3] Yu. Kuznetsova, Duals of quantum semigroups with involution, *Adv. Oper. Theory* 5(1), 167-203 (2020).
- [4] V. Runde, Uniform continuity over locally compact quantum groups, *J. London Math. Soc.* 80, Iss. 1 (2009), 55–71.
- [5] P. M. Soltan, *Quantum Bohr compactification*, *Illinois J. Math.* 49 (2005), no. 4, 1245–1270.