Sujet de thèse en Mathématiques, 2026

Encadrant: Christian Le Merdy
Lieu: Laboratoire de Mathématiques de Besançon
Domaine: Analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs

Bonnes suites en théorie ergodique ponctuelle non-commutative

Soit $T\colon L^1 + L^\infty \to L^1 + L^\infty$ une application linéaire positive (i.e. $T(f) \geq 0$ pour tout $f \geq 0$) et contractante de L^1 dans L^1 et de L^∞ dans L^∞ (i.e. $\|T(f)\|_1 \leq \|f\|_1$ pour tout $f \in L^1$ et $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $f \in L^\infty$). Soient

$$M_n(T) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k, \qquad n \geq 1,$$

ses “moyennes ergodiques”. Un célèbre théorème issu des travaux de Birkhoff, Hopf et Dunford-Schwartz (1958) affirme que pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $f \in L^p$, la suite des $[M_n(T)](f)$ converge presque partout. Dans un article qui a révolutionné la théorie ergodique ponctuelle, Bourgain [1] a démontré que le même résultat de convergence presque partout a lieu pour les moyennes

$$A_n(T) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^{m_k}, \qquad n \geq 1,$$

associées à des suites strictement croissantes d'entiers $(m_k)_{k\geq 0}$ particulières. C'est le cas par exemple si $m_k = k^2$ pour tout $k \geq 0$ ou si $(m_k)_{k\geq 0}$ est la suite des nombres premiers. Dans la foulée, les suites $(m_k)_{k\geq 0}$ pour lesquels $[A_n(T)](f)$ converge presque partout pour tous T, f comme précedemment ont été appellées *bonnes suites* et ont été très étudiées, voir par exemple [4] ou, plus récemment, [3].

Au cours de ces 25 denières années, la théorie des espaces L^p non commutatifs (espaces $L^p(M,\tau)$ associés à une algèbre de von Neumann M munie d'une trace τ) s'est développée de façon spectaculaire en créant des interactions avec les probabilités non-commutatives (matrices aléatoires, produits libres, etc.), la théorie géométrique des groupes et l'analyse harmonique non commutative. L'un des résultats marquants du sujet a été un théorème de Junge-Xu [2] établissant un analogue du théorème de Birkhoff-Hopf-Dunford-Schwartz dans le cadre non commutatif, i.e. pour des opérateurs positifs $T\colon L^1(M,\tau) + M \to L^1(M,\tau) + M$ contractants de $L^1(M,\tau)$ dans lui-même et de $M = L^\infty(M,\tau)$ dans lui-même. Dans ce contexte, la convergence presque partout (qui n'a plus de sens) est remplacée par la convergence “presque uniforme” de Yeadon [5]. (Par le Théorème d'Egoroff, cette convergence coincide avec la convergence presque partout dans le cadre classique.)

Il est clair qu'on peut étendre la notion de bonnes suites au cadre non commutatif. Ce sont les suites strictement croissantes d'entiers $(m_k)_{k\geq 0}$ telles que $[A_n(T)](x)$ converge au sens de Yeadon pour tout opérateur $T\colon L^1(M,\tau) + M \to L^1(M,\tau) + M$ comme ci-dessus et pour tout $x \in L^p(M,\tau)$, $1 \leq p \leq \infty$.

L'objectif de la thèse est d'étudier différents aspects de ce sujet. Cela ira de l'extension de résultats commutatifs à un cadre non commutatif à l'étude de l'existence de bonnes suites dans le cadre commutatif qui ne le sont plus dans le cadre non commutatif, en passant par l'étude de la convergence en norme des $A_n(T)\colon L^p(M,\tau) \to L^p(M,\tau)$.

References

[1] J. Bourgain, *On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers*, Israel J. Math. 61 (1988), no. 1, 39–72.

[2] M. Junge and Q. Xu, *Noncommutative maximal ergodic theorems*, J. Amer. Math. Soc. 20 (2007), no. 2, 385–439.

[3] B. Krause, *Discrete analogues in harmonic analysis—Bourgain, Stein, and beyond*, Graduate Studies in Mathematics, 224. American Mathematical Society, Providence, RI, 2022. xxvi+563 pp.

[4] J. Rosenblatt and M. Wierdl, *Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis*, Ergodic theory and its connections with harmonic analysis (Alexandria, 1993), 3–151, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 205, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[5] F. Yeadon, *Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras, I*, J. London Math. Soc. (2) 16 (1977), no. 2, 326–332.