

Représentations galoisiennes de modules de Drinfeld à grande image, aspects explicites

Encadrants :

— Cécile ARMANA

Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, cecile.armana@univ-lille.fr

— Jean-Robert BELLIARD

Laboratoire de mathématiques de Besançon, Université Marie et Louis Pasteur,
jean-robert.belliard@univ-fcomte.fr

Description :

Les courbes elliptiques sont des objets de grand intérêt en géométrie arithmétique, de part leur structure à la fois géométrique (courbe algébrique) et algébrique (groupe abélien). Les représentations galoisiennes associées aux points de torsion des courbes elliptiques sur les corps des nombres ont suscité, et suscitent encore, de très nombreux travaux. Un résultat emblématique est le théorème de l'image ouverte de Serre (1972) :

Soit E une courbe elliptique sans multiplication complexe définie sur un corps de nombres K . L'image de la représentation galoisienne adélique du groupe de Galois absolu de K , associée aux points de torsion de E , est un sous-groupe ouvert de $GL_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, autrement dit cette image est d'indice fini.

Il a donné lieu à de multiples prolongements notamment en dimension supérieure, et des questions encore ouvertes.

Depuis les années 1970, une longue série de profondes analogies entre d'une part les courbes elliptiques sur les corps des nombres, d'autre part les modules de Drinfeld sur les corps de fonctions en caractéristique non nulle, s'inscrivent dans un parallèle entre l'arithmétique des corps de nombres et celle des corps de fonctions, particulièrement dans le contexte de la correspondance de Langlands. En 2009, Pink et Rüttsche ont démontré un analogue du théorème de Serre pour les modules de Drinfeld de rang quelconque et la représentation galoisienne associée à leurs points de torsion. Plusieurs travaux récents se sont intéressés à la situation où la représentation adélique est surjective, en exhibant des exemples de modules de Drinfeld – seul ou en famille – qui satisfont cette propriété (Chen, 2021, 2022) et en prouvant des résultats de nature statistique sur ce type de comportement parmi l'ensemble des modules de Drinfeld de rang donné (Chen 2024, Ray 2024). Récemment Zywna (2025) a prouvé que la densité des modules de Drinfeld de rang 2 pour lesquels la représentation est surjective est strictement positive. Le sujet proposé consiste à s'inscrire dans ces avancées récentes en apportant des contributions à l'étude des représentations galoisiennes associées aux modules de Drinfeld de rang quelconque, qu'elles soient adéliques, modulo un idéal premier, ou résiduelles. On pourra s'intéresser en particulier à des questions de nature effective sur ces représentations, et à l'étude d'entrelacements pouvant expliquer le défaut de surjectivité.

Références

- [Che21] C.-H. Chen, *Surjectivity of the adelic Galois representation associated to a Drinfeld module of prime rank*, prépublication arXiv 2111.04234 (2021)
- [Che22] C.-H. Chen, *Surjectivity of the adelic Galois representation associated to a Drinfeld module of rank 3*, J. Number Theory 237, 99–123 (2022)

- [Che24] C.-H. Chen, *Natural density of rank-2 Drinfeld modules with big Galois image*, prépublication arXiv 2403.15109 (2024)
- [PR09] R. Pink et E. Rüdtsche, *Adelic openness for Drinfeld modules in generic characteristic*, J. Number Theory 129, No. 4, 882–907 (2009)
- [Ray24a] A. Ray, *The T -adic Galois representation is surjective for a positive density of Drinfeld modules*, Res. Number Theory 10, No. 3, Paper No. 56, 12 p. (2024)
- [Ser72] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. 15, 259–331 (1972)
- [Zyw25] D. Zywina, *Drinfeld modules with maximal Galois action*, prépublication arXiv 2502.01030 (2025)

Domaine scientifique principal de la thèse : théorie des nombres, algèbre, géométrie arithmétique

Connaissances et compétences requises : formation solide de niveau M2 recherche en mathématiques, en algèbre et/ou théorie des nombres.