Sujet de Thèse : Géométrie des variétés de Hecke-Hilbert et applications à la théorie d'Iwasawa

Encadrants : Christophe DELAUNAY et Adel BETINA

1 Contexte et état de l'art

L'étude des familles de formes cuspidales p-adiques pour $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$ a été initiée par Hida dans son travail séminal [8, 9], menant par la suite à la construction de la **courbe de Hecke** (ou *eigencurve*) par Coleman et Mazur [7]. Ces objets ont été généralisés aux groupes réductifs de rang supérieur sous le nom de **variétés de Hecke** (ou *eigenvarieties*). Leur construction repose généralement sur la cohomologie surconvergente des espaces localement symétriques [10] ou sur la cohomologie cohérente des variétés de Shimura [1].

Ces variétés sont des espaces analytiques rigides qui fournissent le cadre adéquat pour l'étude des déformations p-adiques des formes automorphes. Pour obtenir des applications arithmétiques profondes, telles que la construction de fonctions L p-adiques ou la démonstration de lois de réciprocité explicites pour les systèmes d'Euler, il est impératif de comprendre la géométrie locale de ces variétés aux points correspondant aux p-stabilisations des formes automorphes considérées.

2 Problématique et objectifs scientifiques

Alors que la géométrie d'une variété de Hecke aux points de poids cohomologique est bien comprise grâce aux résultats de classicité pour les formes modulaires surconvergentes de petite pente [6], l'étude aux points classiques qui sont des **limites de séries discrètes** (tels que les formes modulaires de Hilbert de poids 1 ou les formes de Siegel de poids $(2,2)$) est nettement plus complexe [3, 2, 5].

L'enjeu est double :

- **Lissité et Conjectures Arithmétiques :** La lissité en de tels points est un ingrédient crucial dans la preuve de nombreux cas de la conjecture de Bloch–Kato, de la conjecture principale d'Iwasawa et de la conjecture de Perrin-Riou.
- **Points Singuliers :** L'étude de la géométrie aux points singuliers, notamment à l'intersection de composantes irréductibles, est liée aux zéros triviaux des fonctions L p-adiques adjointes [4].

Le premier objectif de cette thèse est de décrire la **géométrie locale de la variété de Hecke-Hilbert p-adique** aux points de poids 1 classiques p-irréguliers. Ce travail vise à étendre les résultats récents [5], qui ont calculé explicitement l'anneau local dans le cas de la courbe de Hecke, au cadre des corps totalement réels. Par la suite, nous souhaitons explorer les généralisations possibles pour étudier la géométrie des **variétés de Hecke-Siegel** aux points limites de séries discrètes, notamment pour le poids $(2,2)$.

3 Applications arithmétiques envisagées

Dans un second temps, le projet de thèse explorera plusieurs applications en théorie d'Iwasawa :

1. **Système d'Euler d'Asai :** Étude de l'arithmétique du système d'Euler d'Asai aux points limites de séries discrètes, incluant les formes de poids 1.
2. **Fonctions L p-adiques :** Construction de la fonction L p-adique attachée à une forme de poids 1 via un processus de passage à la limite et l'utilisation de tours de cohomologie étale de la variété modulaire de Hilbert en degré médian.

4 Profil de la candidature

Les candidates et les candidats devront avoir des compétences solides en théorie algébrique des nombres et en géométrie algébrique. **Elles et ils** devront démontrer une excellente maîtrise de la théorie du corps de classes locale et globale, de la théorie des schémas, de la cohomologie des faisceaux et des variétés complexes (incluant les systèmes locaux, la correspondance de Riemann-Hilbert et les connexions linéaires).

En outre, **les chercheuses et les chercheurs** retenus devront faire preuve d'autonomie et d'un goût prononcé pour la recherche fondamentale. Une connaissance préalable des représentations galoisiennes ou des formes automorphes sera considérée comme un atout majeur.

Mots-clés :

Variétés de Shimura, variétés de Hecke, formes automorphes p-adiques, théorie de Hodge p-adique, fonctions L p-adiques.

Références

[1] F. Andreatta, A. Iovita, and V. Pilloni, *On overconvergent Hilbert modular cusp forms*, Astérisque, (2016), pp. 163–193.

[2] J. Bellaïche and M. Dimitrov, *On the eigencurve at classical weight 1 points*, Duke Math. J., 165 (2016), pp. 245–266.

[3] A. Betina, M. Dimitrov, and A. Pozzi, *On the failure of Gorensteinness at weight 1 Eisenstein points of the eigencurve*, Amer. J. Math., 144 (2022), pp. 227–265.

[4] A. Betina and M.-L. Hsieh, *CM congruence and trivial zeros of the Katz p-adic L-functions for CM fields*, arXiv :2202.07286, (2022).

[5] A. Betina, A. Maksoud, and A. Pozzi, *The eigencurve at crystalline points with scalar Frobenius and Gross–Stark regulators*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), (2026). À paraître.

[6] S. Bijakowski, V. Pilloni, and B. Stroh, *Classicité de formes modulaires surconvergentes*, Ann. of Math. (2), 183 (2016), pp. 975–1014.

[7] R. Coleman and B. Mazur, *The eigencurve*, in Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), vol. 254 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 1–113.

[8] H. Hida, *Galois representations into* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ *attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math., 85 (1986), pp. 545–613.

[9] ——, *p-adic automorphic forms on Shimura varieties*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004.

[10] E. Urban, *Eigenvarieties for reductive groups*, Ann. of Math. (2), 174 (2011), pp. 1685–1784.