

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé:

Étude de représentations galoisiennes automorphes en caractéristiques positive

Intitulé en anglais du sujet de these proposé:

Investigation of automorphic galois representations in positive characteristic

Unité de recherche

Laboratoire de mathématique, UMR 6623
Université Marie et Louis Pasteur 16 route de Gray
25030 Besançon Cedex

Nom, prénom et courriel du directeur de thèse

Oukhaba Hassan
hassan.oukhaba@univ-fcomte.fr

Domaine scientifique secondaire de la thèse:

Théorie des nombres et géométrie arithmétique

Description du projet scientifique:

Soit K un corps global de fonctions algébriques à une variable sur un corps fini \mathbb{F}_q de caractéristique p . Fixons ∞ une place de K , et B une algèbre de division sur K , indéfinie par rapport à ∞ . Notons \mathbb{G} le groupe algébrique des inversible de B^\times . Dans sa thèse Soumia Bhihi met en évidence, pour tout sous-groupe ouvert compact \mathcal{K} de $\mathbb{G}(\mathbb{A})$, un système compatible de représentations ℓ -adiques $\{\rho_\ell\}_{\ell \neq p}$

$$\rho_\ell : Gal(K^{sep}/K) \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

vérifiant les propriétés suivantes:

1. La restriction de ρ_ℓ au sous-groupe $Gal(K_\infty^{sep}/K_\infty)$ est déterminée.
2. Il existe un sous-ensemble fini de places S_0 , contenant ∞ , tel que toute place $v \notin S_0$ est non ramifiée pour toutes les représentation ρ_ℓ .
3. Pour tout $v \notin S_0$, le polynôme caractéristique de $\rho_\ell(\text{Frob}_v)$ ne dépend pas de ℓ . En d'autres termes il est égal à un polynôme $T^2 + a_v T + b_v \in \mathbb{Q}[T]$.
4. Les racines de $T^2 + a_v T + b_v$ sont de valeur absolue $q^{1/2}$.

Les représentations galoisiennes ρ_ℓ sont associées à certaines représentations automorphes, grâce à un théorème de Drinfeld. Ces représentations automorphes sont déterminées par des forme automorphes propres quaternioniennes d'une famille d'opérateurs de Hecke. Notons alors $\mathbb{T}(\mathcal{K})$ l'algèbre commutative engendrée par ces opérateurs.

Le sujet que je propose consiste à étudier ces représentations ρ_ℓ , en vue d'applications à l'arithmétique de K . On voudrait notamment

1. Savoir si ces représentaions sont irréductibles.

2. Décrire la restriction de ρ_ℓ aux sous-groupes de décomposition.
3. Étudier les idéaux minimaux de $\mathbb{T}(\mathcal{K})$.
4. Comprendre les idéaux maximaux de $\mathbb{T}(\mathcal{K})$. Un tel idéal \mathfrak{m} contient un premier ℓ , la caractéristique de $\mathbb{T}(\mathcal{K})/\mathfrak{m}$. Il faudrait aussi étudier la représentation semi-simple

$$\rho_{\mathfrak{m}} : \text{Gal}(K^{sep}/K) \longrightarrow GL_2(k_{\mathfrak{m}}),$$

déduite de ρ_ℓ , où $k_{\mathfrak{m}}$ est une extension finie de \mathbb{F}_ℓ .

Pour les applications envisagées, il est aussi crucial de pouvoir déterminer l'image projective de $\rho_{\mathfrak{m}}$ dans $PGL_2(k_{\mathfrak{m}})$.

Connaissances et compétences requises:

L'étudiant doit avoir validé un Master en théorie algébrique des nombres. Il doit aussi avoir des notions de géométrie algébriques et corps de fonctions sur un corps fini.