

Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé :

Problèmes arithmétiques en dynamique holomorphe

Intitulé en anglais du sujet de thèse proposé :

Arithmetic problems in holomorphic dynamics

Unité de recherche : IMB (UMR 5584, Université Bourgogne Europe & CNRS)

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-directeur) de thèse :

Taflin, Johan, johan.taflin@ube.fr

Gauthier, Thomas, thomas.gauthier@universite-paris-saclay.fr

Domaine scientifique principal de la thèse :

Dynamique holomorphe

Domaine scientifique secondaire de la thèse :

Arithmétique

Description du projet scientifique :

Le sujet proposé porte sur l'étude dynamique des endomorphismes des espaces projectifs. Plus précisément, lorsque $f: P^k \rightarrow P^k$ est un endomorphisme, l'étude de la dynamique de f consiste à étudier les suites (x_n) définies par

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$x_0 \in P^k.$$

Lorsque f est à coefficients dans un corps de nombres K , on peut se poser la question du comportement à long terme de la suite (x_n) dans la topologie classique de $P^k(C)$. On peut également poser cette question pour la topologie de Zariski, ou encore s'intéresser à des propriétés plus arithmétiques. Par exemple, un célèbre théorème de Northcott affirme notamment que l'ensemble des points

$\{ x_0 \in P^k(K) : \text{la suite } (x_n) \text{ est (pré) périodique} \}$

est fini.

L'étude des propriétés dynamiques fines de f sur $P^k(C)$ nécessite souvent l'introduction d'un outil mesurable provenant de la géométrie complexe : le courant de Green T_f de f (une forme différentielle à coefficients distributions). Sa puissance extérieure maximale

$$\mu_f = T_f^k$$

est bien définie et fournit l'unique mesure d'entropie maximale de f .

Il existe un lien profond entre cet outil analytique et les propriétés arithmétiques de l'application f . Par exemple, on peut montrer que les points périodiques s'équidistribuent selon cette mesure :

$$(1/d^{nk}) \sum_{\{f^n(x) = x\}} \delta_x \rightarrow \mu_f \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

On dispose de deux démonstrations de ce résultat :

- l'une purement complexe, due à Briend et Duval,
- l'autre utilisant des outils de géométrie d'Arakelov, due à Yuan.

Le but du sujet proposé est d'explorer les liens entre les propriétés des courants positifs fermés issus de la géométrie complexe (leurs propriétés de positivité et celles de leurs supports) et plusieurs problèmes de nature arithmétique concernant la dynamique des endomorphismes de P^k .

Connaissances et compétences requises :

Théorie du pluripotential, géométrie algébrique, espaces de Berkovich, équidistribution des points de petites hauteurs.